Тригонометрические функции
Тема 1. Радианная мера угла.
Поворот точки вокруг начала координат

Определение: Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу, называется углом в 1 радиан (рад).

Мера угла

Радианная | градусная

Формула 1:(радианная →градусная)

$$\alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha_{рад}$$

Формула 2:(градусная → радианная)

$$\alpha_{рад} = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha^{\circ}$$

Задание **1:** Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

$5^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 5 = \frac{5\pi}{180} = \frac{\pi}{36}\,_{рад}$ $\qquad$ $54^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 54 = \frac{\ldots\pi}{180} = \ldots.\,_{рад}$

$18^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 18 = \frac{18\pi}{180} = \ldots.\,_{рад}$ $\qquad$ $135^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot \ldots = \ldots.\,_{рад}$

Задание **2:** Найти градусную меру угла, выраженного в радианах :

$\frac{\pi}{18}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{18})^{\circ} = (\frac{180}{18})^{\circ} = 10^{\circ}$ $\qquad$ $\frac{5\pi}{6}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{6})^{\circ} = (\frac{\ldots}{6})^{\circ} = \ldots.^{\circ}$

$\frac{\pi}{20}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{20})^{\circ} = (\frac{180}{20})^{\circ} = \ldots.^{\circ}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{3}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot \ldots.)^{\circ} = \ldots.^{\circ}$

Задание **3**: Заполнить таблицу:

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	270°	360°
радианы	0									

Формула 3:

$l = \alpha \cdot R$ где l- длина дуги,
R – радиус окружности, которую стягивает дуга

Формула 4:

$S=\frac{R^2}{2}\cdot\alpha$, где l- длина дуги,

R – радиус окружности, которую стягивает дуга

S – площадь кругового сектора

$\alpha=\alpha_{рад}$ радианная мера угла

Пример: Решить задачу:

Вычислить длину дуги, если радиус окружности R = 4см, дуга стягивает центральный угол $\alpha_{рад}$=4,5рад.

Решение: l=α·R=4,5·4=18см.

Ответ: l= 18см.

Задание **4**: Решить задачи:

1)Вычислить радиус окружности, если её дуга, длиной l=7,2см стягивает центральный угол α=3,6рад.

2) Дуга окружности радиуса R=3см стягивает угол $\alpha_{рад}$=4,5рад. Найти длину этой дуги l и площадь сектора , ограниченного ею S.

3) Окружность морских компасов делится на 32 равные дуги, называемые румбами. Вычислите градусную и радианную меры румба.

Задача 1.

Задача 2.

Задача

Задание **5**: Заполнить таблицу:

Угол (в рад.)	60º	45º		
Угол (в град.)		$\frac{\pi}{4}$		4
Радиус (в см.)	3	$\frac{4}{\pi}$	6	
Длина дуги (в см.)		1	3	

Площадь сектора (в см^2)		$\frac{2}{\pi}$		50

Поворот точки вокруг начала координат

Определение: Единичной (тригонометрической) окружностью называется окружность с центром в начале координат, радиуса 1.

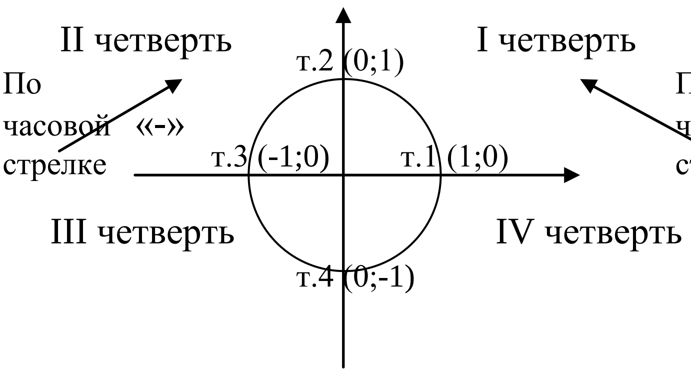


Рисунок 1

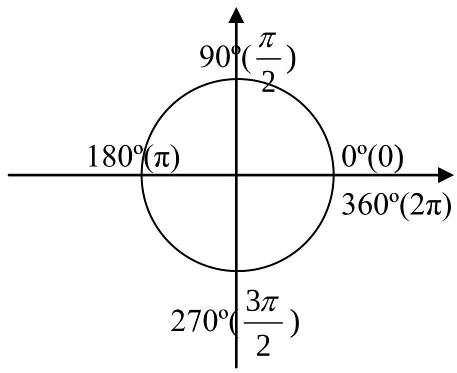


Рисунок 2

Пример: Точка 1(1;0) переместилась по окружности на угол 180º против часовой стрелки, а затем на угол 90º по часовой стрелке. Какие координаты получились? (выполнять по рис/1)

точка .1(1;0)=[влево на 180º]=точка.3(-1;0))=[вправо на 90º]=точка.2(0;1)

Задание **1**:Определить координаты точки после перемещения:

- Точка 1(1;0) переместилась по окружности на 270º против часовой стрелки, затем на 180º по часовой стрелке.

точка .1 (1;0)=[влево на 270º]= точка .4 (0;-1))=[вправо на ….]= точка …..(...;…)

- Точка 1(1;0) переместилась по окружности на π против часовой стрелки, затем на 2π по часовой стрелке.

Задание **2**: Точка М единичной окружности получена поворотом точки1(1;0) на угол α. Заполнить таблицу (по рис.1):

Угол α	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	π	-π	90º	-90º
Координаты т.М	(-1;0)	(0;1)				

Задание **3**: Точка М единичной окружности получена поворотом точки1(1;0) на угол α. Заполнить таблицу (по рис.2):

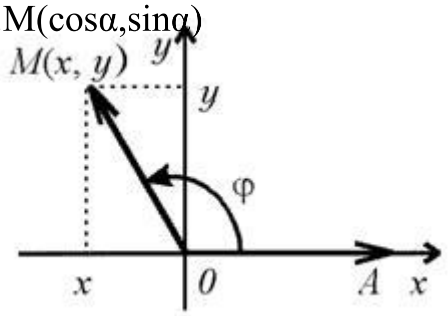
Угол α	135º	-15º	240º	400º	-100º	200º
	IIч.	IVч.				

Тема 2. Определение тригонометрических функций

Определение 1:_Синусом числа α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α радиан. (sinα)

Определение 2:_Косинусом числа α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α радиан.(cosα)

т.М(cosα,sinα)



Определение 3: Тангенсом числа α называется отношение синуса числа α к его косинусу.(tgα)

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

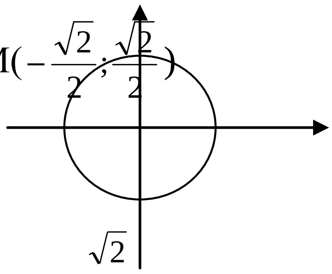
Определение 4: Котангенсом числа α называется отношение косинуса числа α к его синусу.(ctgα)

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Определение: Функции y=sinα, y=cosα, y=tgα, y=ctgα называют тригонометрическими функциями.

Пример: По рисунку определить, чему равен sinα, cosα , затем найти tgα, ctgα.

т.М($-\frac{\sqrt{2}}{2}$;$\frac{\sqrt{2}}{2}$)



Решение:

cosα=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$, sinα= $\frac{\sqrt{2}}{2}$, tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$ ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$

Ответ: cosα=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$, sinα= $\frac{\sqrt{2}}{2}$, tgα=-1, ctgα=-1

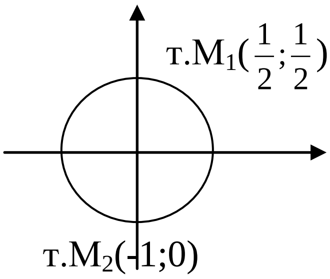
Задание **1**: По рисунку определить, чему равен sinα, cosα , затем найти tgα, ctgα.

т.M_1:

cosα=$\frac{1}{2}$, sinα=….,

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{....}{\frac{1}{2}}=....$

ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=.....$



т.M_2:

cosα=…., sinα=….,

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=.....$

ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{......}{0}=$ не существует, так как на 0 делить нельзя.

<u>Таблица значений:</u>

Четверть	α(рад)	α(град)	α(рад)	α(град)	sin α	cos α	tg α	ctg α
I	0	0	-2π	-360^0	0	1	0	не существует
I	$\frac{\pi}{6}$	30^0	$-\frac{11\pi}{6}$	-330^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
I	$\frac{\pi}{4}$	45^0	$-\frac{7\pi}{4}$	-315^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
I	$\frac{\pi}{3}$	60^0	$-\frac{5\pi}{3}$	-300^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
I	$\frac{\pi}{2}$	$90°$	$-\frac{3\pi}{2}$	-270^0	1	0	не существует	0
II	$\frac{2\pi}{3}$	120^0	$-\frac{4\pi}{3}$	-240^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
II	$\frac{3\pi}{4}$	135^0	$-\frac{5\pi}{4}$	-225^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1
II	$\frac{5\pi}{6}$	150^0	$-\frac{7\pi}{6}$	-210^0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
II	π	$180°$	$-\pi$	-180^0	0	-1	0	не существует
III	$\frac{7\pi}{6}$	210^0	$-\frac{5\pi}{6}$	-150^0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
III	$\frac{5\pi}{4}$	225^0	$-\frac{3\pi}{4}$	-135^0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1

III	$\frac{4\pi}{3}$	240^0	$-\frac{2\pi}{3}$	-120^0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
III	$\frac{3\pi}{2}$	270^0	$-\frac{\pi}{2}$	-90^0	-1	0	не существует	0
IV	$\frac{5\pi}{3}$	300^0	$-\frac{\pi}{3}$	-60^0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
IV	$\frac{7\pi}{4}$	315^0	$-\frac{\pi}{4}$	-45^0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1
IV	$\frac{11\pi}{6}$	330^0	$-\frac{\pi}{6}$	-30^0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
IV	2π	360^0	0	0^0	0	1	0	не существует

Пример: Вычислить:

$3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{3}{2}+\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{3}{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

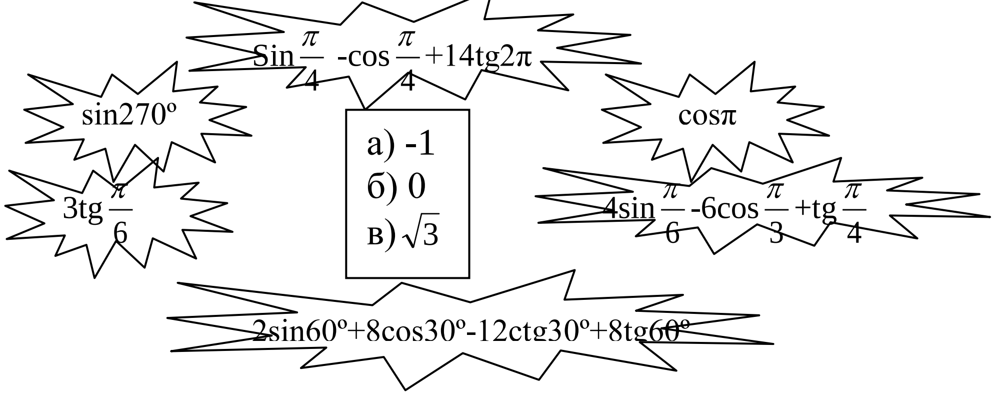
Задание **2**: Закончить решение:

- $\cos 90^\circ-\sin 90^\circ=0-1=$….
- $4\cos\pi+3\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=4\cdot(-1)+3\cdot 1=$….
- $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{3\pi}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-1)=$….
- $\mathrm{tg}45^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\mathrm{ctg}60^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$….=……
- $5\sin\frac{\pi}{4}+3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-5\cos\frac{\pi}{4}-10\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=5\cdot$…..$+3\cdot$……$-5\cdot$……$-10\cdot$…..=……

Задание **3**: Найти ошибку:

1) $3\cos 180^\circ+5\mathrm{ctg}270^\circ-2\sin 360^\circ=3\cdot 1+5\cdot 0=2\cdot 1=3+0-2=1$
2) $2\sin\frac{\pi}{6}-2\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}=1-1-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

Задание **4**: Вычислить и соединить стрелками те примеры, которые имеют одинаковый ответ, ответ выбрать и указать.

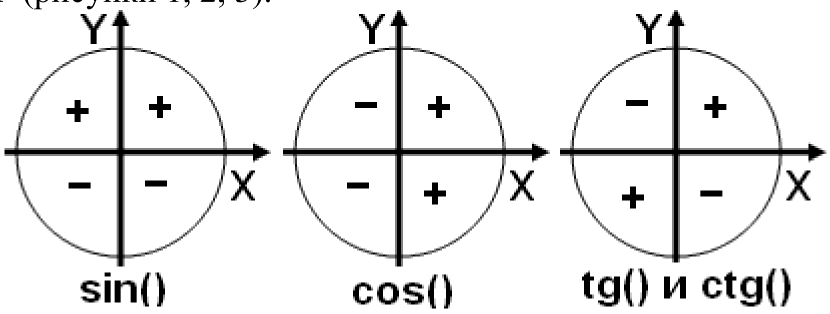


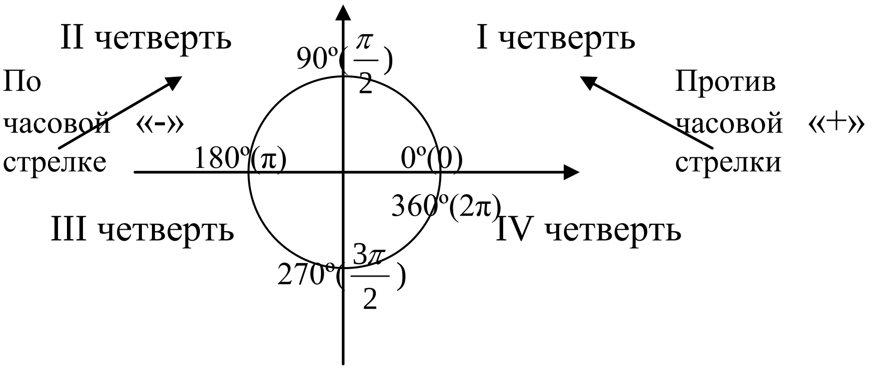
Тема 3. Знаки тригонометрических функций

Знаки чисел

$$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}\alpha$$

определяются тем, в каком **квадранте (четверти)** координатной плоскости *Oxy* лежит луч *OM* (рисунки 1, 2, 3).





Задание **1**: Заполнить таблицу:

№	функция	четверть	знак
1	$\sin 193^o$	IIIч.	-
2	$\cos(-60^o)$	IVч.	
3	$\operatorname{ctg}17^o$		
4	$\operatorname{tg}(-100^o)$		

Пример: Определить знак произведения

- $\sin 400^o \cdot \cos 215^o \cdot \operatorname{tg}134^o \cdot \operatorname{ctg}140^o = \sin(\text{Iч.}) \cdot \cos(\text{IIIч.}) \cdot \operatorname{tg}(\text{IIч.}) \cdot \operatorname{ctg}(\text{Iч.}) = + \cdot (-) \cdot (-) \cdot + = +$

Задание **2**: Найти ошибку:

$\text{Cos}45^o \cdot \sin(-45^o) \cdot \operatorname{tg}100^o \cdot \operatorname{ctg}(-100^o) = \cos(\text{Iч.}) \cdot \sin(\text{Iч.}) \cdot \operatorname{tg}(\text{IIч.}) \cdot \operatorname{ctg}(\text{IIч.}) = + \cdot + \cdot (-) \cdot (-) = +$

Задание **3**: Определить знак произведения

1) $\cos 370^o \cdot \operatorname{tg}15^o \cdot \operatorname{ctg}140^o \cdot \sin 274^o$
2) $\sin(-3^o) \cdot \operatorname{ctg}150^o \cdot \operatorname{tg}300^o \cdot \cos 240^o$

Тема 4. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Задание **1**: Заполнить таблицу:

№	промежуток	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
1	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	IIч.	+	-	-	-
2	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	IIIч.				
3	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$					
4	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$					

Формулы:

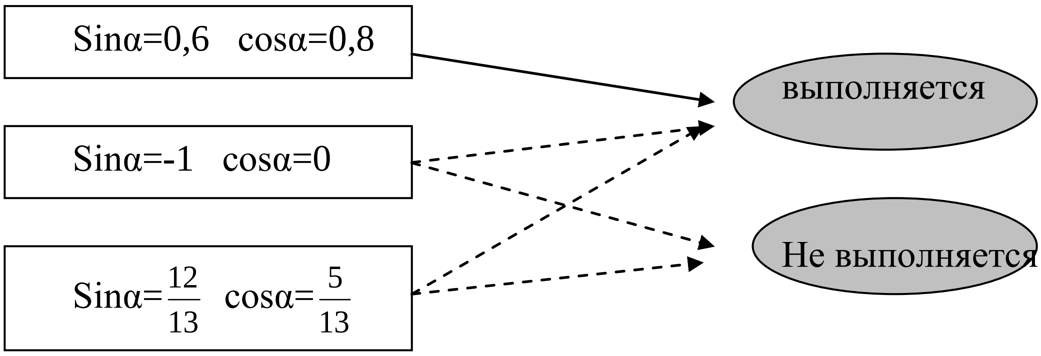
1		$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$	
1(а)	1(б)	$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
2		$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$	
3		$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z,$	
4		$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z,$	
4(а)	4(б)	$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$	$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$
5		$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$	
5(а)		$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	
6		$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$	
6(а)		$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	

Пример: С помощью основного тригонометрического тождества выяснить, могут ли одновременно выполняться равенства:

Sinα=0,6   cosα=0,8

$\underline{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$ $=(0,6)^2+(0,8)^2=0,36+0,64=$**$\underline{1}$** (выполняется)

Задание **2:** С помощью основного тригонометрического тождества выяснить, могут ли одновременно выполняться равенства :



Пример: Вычислить cosα,tgα,ctgα, если sinα=$\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	IIч.	+	-	-	-

Формула 1б)

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=(\cos\alpha\, имеет\, знак\, -)=-\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

Формула 2)

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$$

Формула 3)

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$$

Ответ: cosα=$\frac{4}{5}$,tgα=-$\frac{3}{4}$,ctgα=$-\frac{4}{3}$

Задание **3:** Закончить решение:

1) Вычислить cosα,tgα,ctgα, если sinα=-$\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$	IVч.	-	+	-	-

Формула 1б)

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = (\cos\alpha \textit{имеетзнак} +) = +\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Формула 2)

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -.....$$

Формула 3)

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{....}{...} = -.....$$

Ответ: cosα=$\frac{3}{5}$,tgα=-…,ctgα=-….

2) Вычислить sinα,tgα,ctgα, если cosα=-0,6, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	IIIч.	-	-	+	+

Формула 1а)

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = (\sin\alpha \textit{имеетзнак} -) = -\sqrt{1-(-0{,}6)^2} = -\sqrt{1-0{,}36} = -\sqrt{0{,}64} = -....$$

Формула 2)

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{....}{.....} = -.....$$

Формула 3)

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{....}{...} = -.....$$

Ответ: sinα=…,tgα=-…,ctgα=-….

Пример: Вычислить sinα,cosα,tgα, , если ctgα=-3,

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	IVч.	-	+	-	-

Формула 4а)

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Формула 5а)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} = (\cos\alpha \textit{имеетзнак} +) = +\frac{1}{\sqrt{1+(-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Формула 6а)

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = (\sin\alpha \textit{имеетзнак} -) = -\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{10}})^2} = -\sqrt{1-\frac{1}{10}} = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Ответ: sinα=-$\frac{3}{\sqrt{10}}$, cosα=$\frac{1}{\sqrt{10}}$,tgα=-$\frac{1}{3}$

Задание **4**: Найти остальные тригонометрические функции, если:

1) sinα=0,6 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
2) cosα=-$\frac{12}{13}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
3) tgα=4 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

1) sinα=0,6 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

2) cosα=-$\frac{12}{13}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

3) tgα=4 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Задание **5**: Упростить (по аналогии с решённым):

№	Упростить	№	Решить самостоятельно
1)	$(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha)=$ $=1+\sin\alpha-\sin\alpha-\sin^2\alpha=$ $=1-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$	1)	$(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)$
2)	$\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=1+tg^2\alpha-1=tg^2\alpha$	2)	$Cos^2\alpha+\sin^2\alpha-ctg^2\alpha$
3)	$\frac{1+tg^2\alpha}{1+ctg\ \alpha}=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha$	3)	$1+tg^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}$

Задание **6:** Упростить (воспользоваться формулами:(а + в)² = а² + 2ав + в²,
(а - в)² = а² - 2ав + в²)

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$$

Задание **7*:** Известно, что $tg\alpha=8$. Найти

1) $\frac{ctg\alpha+tg\alpha}{ctg\alpha-tg\alpha}$

2) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

Тема 5.Четность и нечетность тригонометрических функций

Определение: Функция f(x) называется чётной, если для каждого x из области определения этой функции выполняется равенство:

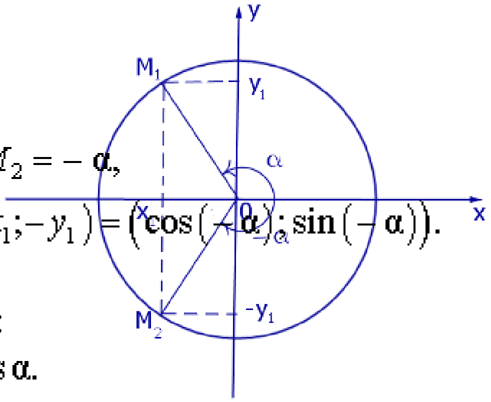
f(-x)=f(x)

Свойство: График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Определение: Функция f(x) называется нечётной, если для каждого x из области определения этой функции выполняется равенство:

f(-x)=-f(x)

Свойство: График нечётной функции симметричен относительно начала координат.



Рассмотрим рисунок

На этом рисунке

$\angle XOM_1 = \alpha,$ $\qquad$ $\angle XOM_2 = -\alpha,$

$M_1 = (x_1; y_1) = (\cos\alpha; \sin\alpha),$ $\qquad$ $M_2 = (x_1; -y_1) = (\cos(-\alpha); \sin(-\alpha)).$

Следовательно, справедливы формулы:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

откуда вытекают формулы:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Таким образом, **косинус** – ***чётная*** функция, а **синус, тангенс и котангенс** – ***нечётные*** функции.

cos(-α)=cosα

sin(-α)=-sinα

tg(-α)=-tgα

ctg(-α)=-ctgα

Задание **1**: Заполнить таблицу:

№	функция	упростить	Ответ
1	sin(-90°)	-sin90°	-1
2	tg(-$\frac{\pi}{4}$)		
3	cos(-45°)		
4	ctg(-$\frac{3\pi}{2}$)		

Задание **2**: Вычислить:

- $2\sin(-30^o)=-2\sin30^o=-2\cdot\frac{1}{2}=-1$
- $3tg(-\frac{\pi}{6})=-3tg\frac{\pi}{6}=-3\cdot\ldots$
- $4\cos(-\frac{\pi}{6})\cdot\sin(-\frac{\pi}{3})+tg(-\frac{\pi}{4})=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-1)=-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-1=\ldots.$
- $2\sin(-\frac{\pi}{6})\cdot\cos(-\frac{\pi}{6})+tg(-\frac{\pi}{3})+\sin^2(-\frac{\pi}{4})=\ldots.$

Задание **3**: Упростить (по аналогии с решённым):

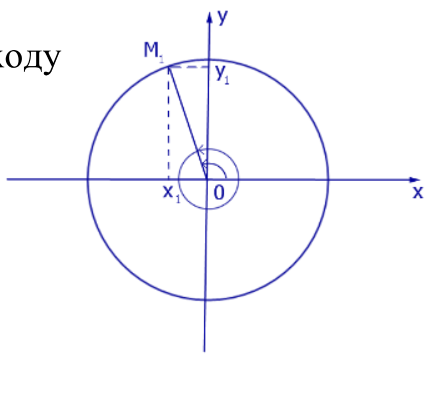
№	Упростить	№	Решить самостоятельно
1)	$\mathrm{Sin}(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)\cdot tg(-\alpha)=$ $=-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(-tg\alpha)=$ $=\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot tg\alpha=$ $=\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$ $=\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\sin^2\alpha$	1)	$Ctg(-\alpha)\cdot\sin\alpha+\cos(-\alpha)$
2)	$(1-\sin(-\alpha))\cdot(1-\sin\alpha)=$ $=(1+\sin\alpha)\cdot(1-\sin\alpha)=$ $=1+\sin\alpha-\sin\alpha-\sin^2\alpha=$ $=1-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$	2)	$(1+tg(-\alpha))\cdot(1-ctg(-\alpha))$

Периодичность тригонометрических функций

Определение: Функция f(x) называется периодической, если существует такое число $T\neq0$, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство:

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T)$$

Число T называют периодом функции f(x).



Рассмотрим рисунок 1, если луч OM_1, повернуть по ходу или против хода часов на полный угол **(360 градусов или 2π радиан)**, то он совместится с самим собой.

Следовательно, справедливы формулы:

$$\sin\left(\alpha^0+360^0\right)=\sin\alpha^0,\qquad \cos\left(\alpha^0+360^0\right)=\cos\alpha^0,$$

$$\sin\left(\alpha^0-360^0\right)=\sin\alpha^0,\qquad \cos\left(\alpha^0-360^0\right)=\cos\alpha^0,$$

а также формулы:

$$\sin\left(\alpha+2\pi\right)=\sin\alpha,\qquad \cos\left(\alpha+2\pi\right)=\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\alpha-2\pi\right)=\sin\alpha,\qquad \cos\left(\alpha-2\pi\right)=\cos\alpha.$$

Поворачивая луч OM_1 на полный угол по ходу или против хода часов *n* раз ($360 \cdot n$ градусов или $2n\pi$ радиан), получаем следующие формулы:

$$\sin\left(\alpha^0 + 360^0 \cdot n\right) = \sin\alpha^0, \qquad \cos\left(\alpha^0 + 360^0 \cdot n\right) = \cos\alpha^0, \qquad n \in Z,$$

$$\sin\left(\alpha + 2n\pi\right) = \sin\alpha, \qquad \cos\left(\alpha + 2n\pi\right) = \cos\alpha, \qquad n \in Z.$$

Таким образом, в случае, когда углы измеряются **в градусах**, ***периодами синуса и косинуса*** являются углы $360^0 \cdot n$, $n \in Z$.

В случае, когда углы измеряются **в радианах**, ***периодами синуса и косинуса*** являются числа $2n\pi$, $n \in Z$.

В случае, когда углы измеряются **в градусах**, ***наименьшим положительным периодом синуса и косинуса*** является угол 360^0.

В случае, когда углы измеряются **в радианах**, ***наименьшим положительным периодом синуса и косинуса*** является число 2π.

В случае, когда углы измеряются **в градусах**, ***периодами тангенса и котангенса*** являются углы $180^0 \cdot n$, $n \in Z$

В случае, когда углы измеряются **в радианах**, ***периодами тангенса и котангенса*** являются числа $n\pi$, $n \in Z$.

В случае, когда углы измеряются **в градусах**, ***наименьшим положительным периодом тангенса и котангенса*** является угол $180°$.

В случае, когда углы измеряются **в радианах**, ***наименьшим положительным периодом тангенса и котангенса*** являются число π.

Задание **1**: Упростить по образцу:

370º=360º+10º=2π+10º
170º=180º-10º= π-10º
120º=90º+30º=$\frac{\pi}{2}$+30º
400º=360º-…..=2π-…..
140º=180º-…..
220º=….
135º=…..

Тема 6. Формулы сложения

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Задание **1**: Вычислить по аналогии:

1) $Sin73^o\cdot\cos17^o + \cos73^o\cdot\sin17^o=$
$= \sin(73^o + 17^o)=\sin90^o=1$

2) $\cos\frac{7\pi}{9}\cdot\cos\frac{11\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\cdot\sin\frac{11\pi}{9} =$
$= \cos(\frac{7\pi}{9} + \frac{11\pi}{9})=\cos\frac{18\pi}{9} =$
$=\cos2\pi=1$

1) $Sin73^o\cdot\cos17^o - \cos73^o\cdot\sin17^o$

2) $\cos\frac{8\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}$

Задание **2**: Упростить:

1) $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)=$

2) $\cos(\alpha + {}^{\pi}/_{6}) - \cos(\alpha - {}^{\pi}/_{6})=$

Задание **3**: Вычислить :

1) Вычислить cos 15°, представив 15° как разность 60° — 45°.

2) Вычислить cos 75°, представив 75° как сумму 30° + 45°.

3) Вычислить cosl05°, представив 105° как сумму 45° + 60°.

Задание **4**: Дано: sin α = 0,6; sin β = —0,28; 0° < α < 90° и 180°< β <270°.
Вычислить: 1) cos (α + β);
2) cos (α — β).

Формулы приведения

Таблица приведения:

α	$\frac{\pi}{2}$ -α	$\frac{\pi}{2}$ +α	π - α	π + α	$\frac{3\pi}{2}$ -α	$\frac{3\pi}{2}$ +α	2π - α	2π + α
sinα	cosα	cosα	sinα	- sinα	- cosα	- cosα	- sinα	sinα
cosα	sinα	- sinα	- cosα	- cosα	- sinα	sinα	cosα	cosα
tgα	ctgα	- ctgα	- tgα	tgα	ctgα	- ctgα	- tgα	tgα
ctgα	tgα	- tgα	- ctgα	ctgα	tgα	- tgα	- ctgα	ctgα

Пример: Вычислить:

$\mathrm{Cos}150^{\circ}=\cos(180^{\circ}-30^{\circ})=\cos(\pi-30^{\circ})=-\cos30^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{Sin}240^{\circ}=\sin(180^{\circ}+60^{\circ})=\sin(\pi+60^{\circ})=-\sin60^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Задание **1**: Закончить решение:

-
-
-
-

Задание **2**: Найти ошибку:

1) $\mathrm{Sin}(\pi-\alpha)\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha\cdot\sin\alpha-(-\cos\alpha)\cdot(-\cos\alpha)=$
$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

2) $\dfrac{\cos^2(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos^2(\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)}=\dfrac{\sin^2\alpha+(-\cos\alpha)^2}{tg\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{tg\alpha}=\dfrac{1}{tg\alpha}=tg\alpha$

Задание **3**: Упростить, из предложенных ответов выбрать верный:

1) $\dfrac{ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha)-tg(\pi+\alpha)+\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$

3) $\dfrac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{ctg(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}$

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+ctg(\pi-\alpha)}{tg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$

4) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}\cdot ctg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$

а) -1 б) $ctg\alpha$ в) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ г) 1

Ответ записать в виде таблицы:

Задание	1	2	3	4
ответ				

$\dfrac{ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha)-tg(\pi+\alpha)+\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=$

$$\frac{\sin(\pi-\alpha)+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+ctg(\pi-\alpha)}{tg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}=$$

$$\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{ctg(2\pi-\alpha)}\cdot\frac{tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}=$$

$$\frac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}\cdot ctg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=$$

Тема 7.Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента

$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$tg\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

Задание **1**: Выразить функции данного аргумента через функции половинного аргумента. Заполнить таблицу:

№	функция	упростить	формула	ответ
1	sin50º	Sin2·25º	sin2α = 2·sinα·cosα	2·sin25º·cos25º
2	cos36º	Cos2·18º	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	
3	tg100º			
4	Sin8º			

Задание **2:** Заполнить таблицу (задание, обратное заданию1):

№	функция	формула	упростить	ответ
1	2·sin15º·cos15º	2·sinα·cosα =sin2α	Sin2·15º	Sin30º=$\frac{1}{2}$
2	$\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$	$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$	Cos2·…º	Cos…º=…
3	$\frac{2tg15^\circ}{1-tg^2 15\,o}$			

Задание **3**: Упростить по аналогии:

$\text{Sin}2\alpha+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=$
$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+(\sin^2\alpha-2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha)=$
$=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha-2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=$
$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\frac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}=$$

Тема 8.Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -\ 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Задание **1**: Вычислить по аналогии:

1) $\mathrm{Cos}105^o+\cos75^o=$
$=2\cdot\cos\frac{105^o-75^o}{2}\cdot\cos\frac{105^o+75^o}{2}=$
$=\ 2\cdot\cos 15^o\cdot\cos 90^o=$
$=\ 2\cdot\cos 15^o\cdot 0=0$

2) $\mathrm{Sin}300^o+\sin60^o=$
$=2\cdot\sin\frac{300^o+60^o}{2}\cdot\cos\frac{300^o-60^o}{2}=$
$=2\cdot\sin 180^o\cdot\cos120^o=$
$=2\cdot 0\cdot\cos120^o=0$

1) $\mathrm{Sin}105^o - \sin75^o$

2) $\mathrm{Cos}105^o + \cos165^o$

Задание **2**: Упростить:

1) $\sin(30° + \alpha) + \sin(30° — \alpha)=$

2) $\sin(\pi/_3 + \alpha) — \sin(\pi/_3 — \alpha)=$

Задание **3***:* Упростить выражения.

1) $\sin 12° \cdot \cos 18° + \sin 18° \cdot \cos 12°$;
2) $\sin 65° \cdot \sin 55° + \cos 65° \cdot \cos 55°$;
3) $\sin 4{,}25 \cdot \cos 1{,}11 — \sin 1{,}11 \cdot \cos 4{,}25$;
4) $\sin {}^{3\pi}/_7 \cdot \sin {}^{5\pi}/_{21} — \cos {}^{3\pi}/_7 \cdot \cos {}^{5\pi}/_{21}$
5) $\sin\alpha — \sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)$;
6) $\sin(15° + \alpha) \cdot \cos(15° — \alpha) + \sin(15° — \alpha) \cdot \cos(15° + \alpha)$.

Задание **4**: Доказать тождества.
1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$;
2) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cdot \sin\beta$.
3) $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta$;
4) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \cdot \sin\beta$.
5) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;
6) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

Проверь себя!

1. Вычислить $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2. Найти значение выражения:

1) $\cos 135^\circ$

2) $\sin\frac{8\pi}{3}$

3) $tg\frac{7\pi}{3}$

4) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$

3. Доказать тождество:

1) $3\cos 2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2\cos 2\alpha$

2) $\frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha} = \sin\alpha$

4. Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha-\beta) - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\sin(-\beta)$

2) $\cos^2(\pi-\alpha) - \cos^2(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

3) $2\sin\alpha\cos\beta + \cos(\alpha+\beta)$

Контрольная работа

Уровень А:

1) Найти значение выражения:

а) $\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}$

б) $2\cos60^{\circ}-\mathrm{tg}45^{\circ}$

в) $2\mathrm{tg}45^{\circ}+5\mathrm{ctg}270^{\circ}-3\sin180^{\circ}$

2) Найти остальные тригонометрические функции, если:

а) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ б) $\cos\alpha=-0,6$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

3) Упростить:

а) $\sin^2\alpha-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha+\cos^2\alpha$

б) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha$

Уровень В:

1) Найти значение выражения:

а) $2\cos\frac{\pi}{6}+4\sin\frac{5\pi}{6}-3\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}$

б) $\cos100^{\circ}+\cos80^{\circ}$

2) Найти остальные тригонометрические функции, если:

а) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ б) $\mathrm{ctg}\alpha=5$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

3) Упростить:

а) $(\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha$

б) $(1-\cos^2(-\alpha))\cdot(1+\mathrm{tg}^2(-\alpha))$

Уровень С:

1) Найти значение выражения:

а) $\sin155^{\circ}-\sin25^{\circ}$

б) $\sin20^{\circ}\cdot\cos10^{\circ}+\cos20^{\circ}\cdot\sin10^{\circ}$

в) $\cos20^{\circ}\cdot\cos40^{\circ}-\sin20^{\circ}\cdot\sin40^{\circ}$

2) Найти остальные тригонометрические функции, если $\mathrm{tg}\alpha=-4$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

3) Упростить:

а) $\frac{\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cdot ctg^4\alpha$

б) $\frac{\sin^2\alpha-tg^2\alpha}{\cos^2\alpha-ctg^2\alpha}$

в) $\sin^4(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)-\cos^4(-\alpha)$